АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ ОПОЛЗНЕВЫХ СКЛОНАХ

© Бийбосунов А.И.[1], Бексултанов Ж.Т.[2], Уметалиев М.У.[3]

Кыргызский научно-технический центр «Энергия»,
Киргизия, г. Бишкек

Кыргызский государственный технический университет имени И. Раззакова,
Киргизия, г. Бишкек

Институт новых информационных технологий Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева, Киргизия, г. Бишкек

Рассмотрены процессы фильтрации жидкости в грунтовых оползневых горных склонах, имеющих распространение на территории Кыргызстана. Для расчета фильтрации жидкости предлагается трехмерная модель нестационарного течения при анизотропном строении среды. Для решения поставленной нестационарной начально-краевой задачи применяются методы малого параметра и разложения в ряд с использованием автомодельных решений и гипергеометрических функций.

Ключевые слова: фильтрация жидкости, краевая задача, начальные и граничные условия, автомодельные решения, гипергеометрические функции.

Как известно, гидрогеологические факторы играют существенную роль в оползневых процессах, особенно на территории Кыргызстана, и их также включают во все имеющиеся научные классификации основных оползнеобразующих факторов. Мы их разделяем на фильтрационные течения в оползневых грунтовых склонах за счет грунтовых и подземных вод и на инфильтрационные течения в склонах за счет атмосферных осадков, снеготаяния и поверхностных вод [2, 3].

---

[1] Директор Кыргызского научно-технического центра «Энергия», доктор физико-математических наук, доцент.

[2] Заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Института новых информационных технологий КГУ имени И. Арабаева, кандидат физико-математических наук, и.о. доцента.

[3] Доцент КГТУ имени И. Раззакова, кандидат физико-математических наук, доцент.

Таким образом, с помощью теории гидродинамики можно исследовать основные оползнеобразующие факторы, которые связаны с движением жидкости в системе «грунт-вода», имеющей место в оползневых горных склонах Кыргызстана. В свою очередь, это позволяет исследовать их аналитическими, приближенно-аналитическими и вычислительными методами подземной гидродинамики. Следовательно, разбивая оползнеобразующие факторы на фильтрационные и инфильтрационные факторы, мы имеем возможность исследовать их методами гидродинамики, моделируя их в виде различных краевых задач, и вычислять все основные физико-механические характеристики исследуемых природных явлений и процессов, получить точную качественную и количественную картину происходящих процессов в оползневых горных склонах.

Как известно, краевая задача нестационарной пространственной фильтрации в однородно-анизотропном грунте описывается уравнением в частных производных второго порядка [1, 2, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}[k_1\frac{\partial H}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[k_2\frac{\partial H}{\partial y}]+\frac{\partial}{\partial z}[k_3\frac{\partial H}{\partial z}]=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1}$$

при следующих начально-краевых условиях:

$$\begin{gathered}
H(x,y,z,t)_{|t=0}=H_0(x,y,z) \qquad 0\le t\le T \\
H(x,y,z,t)_{|x=N_0}=H_{01}(t,y,z) \\
H(x,y,z,t)_{|x=N_1}=H_{11}(t,y,z) \\
H(x,y,z,t)_{|y=N_0'}=H_{02}(x,t,z) \\
H(x,y,z,t)_{|y=N_1'}=H_{12}(x,t,z) \\
H(x,y,z,t)_{|z=N_0''}=H_{03}(x,y,t) \\
H(x,y,z,t)_{|z=N_1''}=H_{13}(x,y,t) \\
N_0\le x\le N_1 \quad N_0'\le y\le N_1' \quad N_0''\le z\le N_1'',
\end{gathered} \tag{2}$$

где $H(x, y, z, t)$ – искомая функция напора; K_1, K_2, K_3 – коэффициенты фильтрации, грунт считается однородно-анизотропным ($K_1 \neq K_2 \neq K_3 = const$).

Рассмотрим исходную задачу (1)-(2). Для решения применим следующий подход и ищем функцию напора жидкости в виде:

$$H(x,y,z,t)=\tau^m \cdot f(\tau), \qquad \tau=\frac{t}{(x+y+z)^2}, \tag{3}$$

здесь m – показатель автомодельности.

Сначала находим производную по времени и производные по X:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\tau^m}{(x+y+z)^2}\cdot[\frac{m}{\tau}f(\tau)+f'(\tau)] \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{2t\cdot\tau^m}{(x+y+z)^3}\cdot[\frac{m}{\tau}f(\tau)+f'(\tau)] \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}&=m(m-1)\tau^{m-2}\tau^2\frac{4}{(x+y+z)^2}f(\tau)+m\tau^{m-1}\tau\frac{6}{(x+y+z)^2}f(\tau)+\\&+m\tau^{m-1}\tau^2\frac{4}{(x+y+z)^2}f'(\tau)+m\tau^{m-1}\tau^2\frac{4}{(x+y+z)^2}f'(\tau)+\\&+\tau^m\tau\frac{6}{(x+y+z)^2}f'(\tau)+\tau^m\tau^2\frac{4}{(x+y+z)^2}f''(\tau)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\frac{4\tau^m}{(x+y+z)^2}[\tau^2 f''(\tau)+(2m+\frac{3}{2})\cdot\tau\cdot f'(\tau)+m(m+\frac{1}{2})f(\tau)].$$

Аналогичным образом находятся $\partial H/\partial y$, $\partial H/\partial z$, $\partial^2 H/\partial y^2$, $\partial^2 H/\partial z^2$. Подставляя соотношения (4)-(6) в исходное уравнение (1) и после несложных преобразований, получим:

$$\begin{aligned}&\tau^2 f''(\tau)+[(2m+\frac{3}{2})\tau-\frac{1}{12(k_1+k_2+k_3)}]f'(\tau)+\\&+[m(m+\frac{1}{2})-\frac{m}{\tau}\frac{1}{12(k_1+k_2+k_3)}]f(\tau)=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\tau^3 f''(\tau)+[(2m+\frac{3}{2})\tau+k]\cdot\tau\cdot f'(\tau)+[m(m+\frac{1}{2})+mk]\cdot f(\tau)=0,$$

где $K=-\dfrac{1}{12(K_1+K_2+K_3)}$. $\qquad (8)$

Теперь решение уравнения (7) будем искать в виде следующего ряда:

$$f(\tau)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \tau^{i+\alpha}. \tag{9}$$

Здесь $a_0 \neq 0$, α – характеристический показатель, который подлежит определению, a_i (i = 1,2,…) – неизвестные коэффициенты. Следует отметить, что ряд (9) является сходящимися. После этого вычислим первую и вторую производные:

$$f'(\tau)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,(i+\alpha)\cdot \tau^{i+\alpha-1} \tag{10}$$

$$f''(\tau)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,(i+\alpha)(i+\alpha-1)\cdot \tau^{i+\alpha-2}. \tag{11}$$

Теперь подставляя значения производных (10)-(11) в уравнение (7), имеем:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+\alpha)(i+\alpha-1)\tau^{i+\alpha+1}+(2m+\frac{3}{2})\sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+\alpha)\tau^{i+\alpha+1}+$$
$$+k\sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+\alpha)\tau^{i+\alpha}+[m(m+\frac{1}{2})+mk]\sum_{i=0}^{\infty} a_i\cdot\tau^{i+\alpha}=0. \tag{12}$$

Далее получим:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+\alpha)(i+\alpha-1+2m+\frac{2}{3})\tau^{i+\alpha+1}+[k\alpha+m(m+\frac{1}{2})+mk]\cdot a_0\tau^{\alpha}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}[k(i+1+\alpha)+m(m+\frac{1}{2})+mk]\cdot a_{i+1}\tau^{i+\alpha+1}=0. \tag{13}$$

Исходя из последнего выражения (13), сделаем следующие допущения:

$$a_0\neq 0,\quad a_0\neq 1,\quad k\cdot\alpha+m(m+\frac{1}{2})+mk=0. \tag{14}$$

Тогда для параметра α получим определяющее соотношение:

$$\alpha=-\frac{m(m+k+\frac{1}{2})}{k}. \tag{15}$$

Выражение (15) дает возможность для определения характеристического показателя α, связанного с показателем автомодельности m и коэффициентом фильтрации K, где K определено соотношением (8). Учитывая теперь формулы (14)-(15), из (13) получим:

$$(i+\alpha+2m+\frac{1}{2})(i+\alpha)\cdot a_i+[k(i+\alpha+1)+m(m+\frac{1}{2})+km]\cdot a_{i+1}=0. \qquad (16)$$

После преобразований из последнего выражения имеем:

$$a_{i+1}=-\frac{(i+\alpha)(i+\alpha+2m+\frac{1}{2})}{k(i+\alpha+m+1)+m(m+\frac{1}{2})}\cdot a_i. \qquad (17)$$

Таким образом, мы получили рекуррентную формулу для определения коэффициентов исходного ряда (9). Тогда решение уравнения (7) можно представить в виде [2, 3]:

$$f(\tau)=A\cdot\tau^{-\frac{m(m+k+\frac{1}{2})}{k}}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}a'_i\cdot\tau^i, \qquad (18)$$

где a'_i – определяется из рекуррентной формулы (17), A – это произвольное постоянное. Подставим найденное значение (18) в формулу (2) и окончательно получим:

$$H(x,y,z,t)=[\frac{(x+y+z)^2}{t}]^{\frac{m(m+\frac{1}{2})}{k}}\cdot A\cdot\sum_{i=0}^{\infty}a'_i[\frac{t}{(x+y+z)^2}]^i\,. \qquad (19)$$

Последнее выражение (19) представляет собой решение нашего уравнения нестационарной трехмерной фильтрации (1). Здесь a'_i – определяется из рекуррентной формулы (17) и согласно формуле (16), m-показатель автомодельности, A – произвольное постоянное, которое определяется согласно граничных условий задачи (2). Итак, получены приближенно-аналитические решения нестационарной трехмерной начально-краевой задачи фильтрации вида (1)-(2). Они представляют собой, помимо прочего, основу для проверки и сравнения численных решений.

Список литературы:

1. Полубаринова-Кочиа П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.

2. Бийбосунов Б.И. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. – Бишкек: Илим, 1998.

3. Бийбосунов Б.И. Моделирование и решение оптимизационных задач напорной фильтрации при сложном строении грунта. – Бишкек: Илим, 1998.