ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Баетов А.К., Бексултанов Ж.Т., Бекибай кызы Г.

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССИН ОПТИМАЛДЫК БАШКАРУУ ЖӨНҮНДӨ БИР МАСЕЛЕ

Баетов А.К., Бексултанов Ж.Т., Бекибай кызы Г.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

A.K. Baetov, Zh.T. Beksultanov, Bekibai kyzy G.

A PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF OSCILLATORY PROCESSES

УДК: 517.97; (575.2) (04); 62-50

Жекече туундудагы квазисызыктуу теңдеме аркылуу баяндалуучу термелүү процессин оптималдык башкаруу жөнүндө маселе каралган. Сапаттык чен өлчөмү катары квдраттык функционал эсептелет. Маселе Фурьенин катары түрүндө чыгарылат. Жакындаштырылган чыгарылышынын жыйналуучулугу абалы баоюнча жана функционалы боюнча далилденет. Айрым баа берүүлөр келтирилген.

***Негизги сөздөр**. жекече туундудагы квазисызыктуу теңдеме, оптималдык башкаруу, сапаттык чен өлчөм, функционал, дифференциалдык теңдемелердин эсептөө системасы, жакындаштыруунун жыйналуучулугу.*

Рассматриваются задачи оптимального управления колебательным процессом, который описывается квазилинейным уравнением в частных производных. Критерием качества является квадратичный функционал. Задача решается в виде ряда Фурье. Доказывается сходимость приближенного решения по состоянии и по функционалу. Приводятся некоторые оценки.

***Ключевые слова.** квазилинейное уравнение в частных производных, оптимальное управление, критерий качества, функционал, счетная система дифференциальных уравнений, сходимость приближений.*

We consider the optimal control problem oscillatory process, which is described by a quasi-linear partial differential equation. The criterion of quality is a quadratic functional. The problem is solved in the form of a Fourier series. The convergence of the approximate solutions for state and functionality. We present some estimates.

***Key words:** quasilinear partial differential equation, optimal control, quality criteria, the functional countable system of differential equations, convergence of approximations.*

Пусть управляемый процесс описывается квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа.

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = \varepsilon P(x,t) + \varepsilon F(x,t,V) \tag{1}$$

с начальными

$$V(x,0) = \varphi(x), \ \ V_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le l) \tag{2}$$

и граничными

$$V(0,t) = 0, \ V(l,t) = 0 \qquad (0 \le t \le T) \tag{3}$$

условиями где $V(x,t)$ определена в области $Q = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$; a=const; $\varepsilon > 0$ - малый параметр; $u(x,t)$- управляющая функция. Предположим, что нелинейная часть $F(x,t,V)$ не содержит свободного члена, зависящего только от t; $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ - известные достаточно гладкие функции своих аргументов.

Рассмотрим задачу: найти управляющую функцию $u(x,t)$, которая вместе с решением смешанной задачи (1) – (3) доставляет минимум функционалу

$$J[u] = \int_0^{\varsigma} \left[V(X,T) - X(x) \right]^2 \, dx + \beta \iint_Q u^2 \, (x,t) dx\, dt \tag{4}$$

где $X(x)$ - неизвестная функция, $\beta > 0$ - постоянное число.

Решение задачи (1)-(3) при фиксированном $u(x,t)$ ищем в виде ряда [3]

$$V(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k(t,\varepsilon)\cos\omega_k t+B_k(t,\varepsilon)\sin\omega_k t\right] sin\lambda_k x, \quad (5)$$

где $A_k(t,\varepsilon)$ *и* $B_k(t,\varepsilon)$ - пока неизвестные функции, подлежащие определению. Для однозначного определения этих функций вводим дополнительные условие.

$$V_t(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k\left[-A_k(t,\varepsilon)\sin\omega_k t+B_k(t,\varepsilon)\cos\omega_k t\right] sin\lambda_k x, \quad (6)$$

Подставляя (5) в (1) и учитывая условие (6), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k\left[-\dot{A}_k(t,\varepsilon)\sin\omega_k t+\dot{B}_k(t,\varepsilon)\cos\omega_k t\right] sin\lambda_k x=\varepsilon u(x,t)+\varepsilon f(x,t,A,B), \quad (7)$$

где $$f(x,t,A,B)=F(x,t,\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k(t,\varepsilon)\cos\omega_k t+B_k(t,\varepsilon)\sin\omega_k t\right] sin\lambda_k x) .$$

В силу предположения относительно *F(x,t,V)* функцию *f(x,t,A,B)* можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\lambda_k x$. Предполагаем также, что *u(x,t)* допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\lambda_k x$. Тогда, учитывая (6), (7), имеем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений стандартного вида

$$\begin{aligned}\dot{A}_k(t,\varepsilon)&=-\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left[u(t)+f_k(t,A,B)\right]\sin\omega_k t,\\ \dot{B}_k(t,\varepsilon)&=\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left[u_k(t)+f_k(t,A,B)\right]\cos\omega_k t,\end{aligned} \quad (8)$$

С начальными условиями

$$A_k(0,\varepsilon)=\varphi_k,\ B_k(0,\varepsilon)=\frac{\psi_k}{\omega_k},\ k=1,2,..., \quad (9)$$

где φ_k *и* ψ_k - коэффициенты Фурье функций φ(*x*) и ψ(*x*) соответственно; $f_k(t,A,B)$ -коэффициенты Фурье функции $f_k(x,t,A,B)$.

Функционал (4) преобразуется к виду

$$J\left[u\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[V_k(T)X_k\right]^2+\beta\int_O^T\sum_{k=1}^{\infty}u_\kappa^2(t)dt, \quad (10)$$

где $V_k(T)$ *и* X_k - коэффициенты Фурье функций $V_k(X,T)$ *и* $X(x)$ соответственно. Как видно из (5), $V_k(T)$ выражается через $A_k(T,\varepsilon)$ *и* $B_k(T,\varepsilon)$ по формуле

$$V_k(T)=A_k(T,\varepsilon)\cos\omega_k T+B_k(T,\varepsilon)\sin\omega_k T$$

Наряду со счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями (9) рассмотрим так называемую укороченную систему

$$\begin{aligned}\dot{A}_{kn}(t,\varepsilon)&=-\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left[u_{kn}(t)+f_{kn}(t,A_n,B_n)\right]\sin\omega_k t,\\ \dot{B}_{kn}(t,\varepsilon)&=\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left[u_{kn}(t)+f_{kn}(t,A_n,B_n)\right]\cos\omega_k t,\ k=1,2,....,n\end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$A_{kn}(0,\varepsilon)=\varphi_k,\ B_{kn}(0,\varepsilon)=\frac{\psi_k}{\omega_k},\ k=1,2,....,n \quad (12)$$

где

$$f_{kn}(t,A_n,B_n)=f_k(t,A_1,A_2,...A_n,0,...,B_1,B_2,...,B_n,0,...)$$

а вместо (10) рассмотрим укороченный функционал

$$J\left[u_n\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[U_к\left(T\right)-X_k\right]+\beta\int_o^T\sum_{к=1}^{n}u_к^2\left(t\right)dt. \qquad (13)$$

Таким образом, вместо исходной задачи оптимального управления (1)-(4) имеем следующую задачу приближенного оптимального управления: найти управляющую функцию $P_n(t)=\sum_{к=1}^{t}P_к\left(t\right),$ которая вместе с решением задачи (11)-(12) минимизирует функционал (13). Такие задачи управления (т.е (11)-(13)) подробно рассматривались многими авторами, в частности, в [2]. Пусть $u^0(t)$ - оптимальное управление, решающее задачу (11)-(13), $u^0(t)$ будем принимать за приближенное решение исходной задачи (1)-(4). Мы оценим допускаемую погрешность по состоянию $V(x,t)$, т.е. величину $\left|V(x,t,\varepsilon)-V_n(x,t,\varepsilon)\right|$

При фиксированной управляющей функции u_k^0 укороченная система (11) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому для нахождения точного или приближенного решения такой системы можно использовать все существующие методы.

Предположим, что функции $f_k(t,A,B)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|f_k(t,\bar{A},\bar{B})-f_k(t,A,B)\right|\le 2k\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|\bar{A}_k-A_k\right|+\left|\bar{B}_k-B_k\right|\right] \qquad (14)$$

где $k=const$

Рассмотрим функцию

$$V_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\left[A_{kn}\cos\omega_k t+B_{kn}\sin\omega_k t\right]\sin\lambda_k x \qquad (15)$$

где $A_{kn}(t,\varepsilon),\ B_{kn}(t,\varepsilon)\ (k=1,2,...,n)$ решение укороченной системы (11) при фиксированных P_k^0. Определенную таким образом функцию $V_n(x,t,\varepsilon)$ назовем приближенным решением задачи (1)-(3). Теперь оценим величину $\left|V(x,t,\varepsilon)-V_n(x,t,\varepsilon)\right|$, где $V(x,t,\varepsilon)$ - точное решение задачи (1)-(3).

Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)$ сходится равномерно, тогда по признаку Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов [78] получим

$$\left|u_k(t)\right|\le\alpha_k \qquad (16)$$

где α_k образует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

Имеет место следующее утверждение.

Пусть на множестве $\Omega=\left\{Q,V\in R^{-1}\right\}$ выполнены условия:

(1) Функция *F(x,t,V)* непрерывна по *x* и *t* и удовлетворяет условию Липшица по *V* и с постоянной k

$$\left|F(x,t,\bar{V})-F(x,t,V)\right|\le k\left|\bar{V}-V\right|;$$

(2) Смешанная задача (1)-(3) при фиксированном *u(x,t)* имеет классическое решение $V(x,t,\varepsilon)$ в виде ряд (5), где $A_{kn}(0,\varepsilon)=\varphi_k,\ B_{kn}(0,\varepsilon)=\dfrac{\psi_k}{\omega_k},\ k=1,2,....,n$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k$, сходятся , а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|A_{kn}(t,\varepsilon)\right|+\left|B_{kn}(t,\varepsilon)\right|\right)$ сходится равномерно;

(3) Функция $F(x,t,V(x,t))$ разлагается в ряд Фурье, где $V(x,t)$ - решение смешанной задачи (1)-(3), коэффициенты Фурье $f_k(t,A,B)$ мажорируются сходящимся числовым рядом, т.е. $f_k(t,A,B)\le\alpha_k$, где $\alpha_k\ \ (k=1,2,...,)$ образует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

Тогда существует номер n, такой, что

$$\left|V(x,t)-V_n(x,t)\right|<\varepsilon M_n(T,\varepsilon), \tag{17}$$

где $V(x,t)$ - решение смешанной задачи (1)-(3), $V_n(x,t)$ определяется выражением (15).

Отсюда получим сходимость: $\left|V(x,t)-V_n(x,t)\right|\to 0$

Пусть теперь u^0 есть оптимальное управление для задачи (11)-(13), а u^* есть оптимальное управление для задачи (8), (9), (10). Также предположим, что коэффициенты Фурье удовлетворяют условию $\left|f_k^0\left(t,A,B,u\right)\right|\le\lambda_k\ \ (k=1,2,...,)$, где λ_k образуют сходящихся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$. Тогда очевидно, имеет место неравенство

$$J_n[u^*]-J_n[u^0]\ge 0,$$

Отсюда, согласно неравенству (1.10) в [7], имеем

$$J_1[u^0]-J_1[u^*]\le J_1[u^0]-J_n[u^0]. \tag{18}$$

Оценим правую часть неравенства (18)

$$\left|J_1[u^0]-J_n[u^0]\right|=\left|\varepsilon\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}f_k^0(t,A,B,u^0)dt-\varepsilon\int_0^T\sum_{k=1}^{n}f_k^0(t,A,B,u^0)dt\right|\le$$

$$\le\varepsilon\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k^0(t,A,B,u^0)-\sum_{k=1}^{n}f_k^0(t,A,B,u^0)\right|dt=$$

$$=\varepsilon\int_0^T\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k^0(t,A,B,u^0)\right|dt\le\varepsilon\int_0^T\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|f_k^0(t,A,B,u^0)\right|dt.$$

Согласно сделанному выше предположению, получим

$$\varepsilon\int_0^T\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|f_k^0(t,A,B,u^0)\right|dt\le\varepsilon T\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k.$$

По признаку сходимости числового ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k$ имеем

$$\varepsilon T\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k<\varepsilon T\delta,$$

где $\delta>0$ малая const. Отсюда окончательно получим оценку

$$\left|J_1[u^0]-J_1[u^*]\right|\le\varepsilon T\delta. \tag{19}$$

Теперь находим предел при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{P}\left|J_n[u]-J_1[u]\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{P}\left|\varepsilon\int_0^T\sum_{k=1}^{n} f_k^0(t,A,B,u)dt-\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty} f_k^0(t,A,B,u)dt\right| =$$

$$=\max_{P}\left|\varepsilon\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty} f_k^0(t,A,B,u)dt-\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty} f_k^0(t,A,B,u)dt\right| = 0$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{P}\left|J_n[u]-J_1[u]\right| = 0\,.$$

Тогда на основании теоремы 2 в [4] имеем сходимость

$$\lim_{n\to\infty} J_n[u^0]-J_1[u^*]$$

Что и требовалось доказать.

Литература:

1. Баетов А.К. Приближенные решение одной квазилинейной задачи оптимального управления. Оптимальный синтез в системах с распределенными параметрами. - Фрунзе, 1989.

2. Егоров, А.И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии. / А.И. Егоров, Р. Рафатов. - Фрунзе: Илим, 1990. - 336 с.

3. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. - Киев: Наукова думка, 1983.

4. Распопов Б.М. Оценка эффективности управления по упрощенной модели объекта. - Фрунзе: Илим, 1975.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Бийбосунов Б.И.