РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ИНФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННОГО РЯДА

© Бийбосунов А.И.[1], Бексултанов Ж.Т.[2], Уметалиев М.У.[3]

Кыргызский научно-технический центр «Энергия»,
Киргизия, г. Бишкек

Кыргызский государственный технический университет имени И. Раззакова,
Киргизия, г. Бишкек

Институт новых информационных технологий Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева, Киргизия, г. Бишкек

Работа посвящена исследованию инфильтрационных процессов в оползнеопасных горных склонах, распространенных на территории Кыргызстана. Формулируется нелинейная начально-краевая задача инфильтрации жидкости, для решения которой применяется аналитический метод малого параметра с разложением в ряд.

Ключевые слова: инфильтрация жидкости, начально-краевая задача, автомодельные решения, гипергеометрические функции.

Как известно, процесс впитывания влаги в почво-грунт можно математически моделировать квазилинейным дифференциальным уравнением параболического типа второго порядка в следующем виде [1, 2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{\partial K(W)}{\partial x} \tag{1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} W(x,t)\big|_{t=0} &= Q_0(x) \\ W(x,t)\big|_{x=0} &= Q_0(t) \\ W(x,t)\big|_{x=h} &= Q_1(t), \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] Директор Кыргызского научно-технического центра «Энергия», доктор физико-математических наук, доцент.

[2] Заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Института новых информационных технологий КГУ имени И. Арабаева, кандидат физико-математических наук, и.о. доцента.

[3] Доцент КГТУ имени И. Раззакова, кандидат физико-математических наук, доцент.

где $W(x, t)$ – искомая функция влажности, $D(W)$ и $K(W)$ – соответственно коэффициенты диффузии и влагопроводности. Коэффициенты $D(W)$ и $K(W)$ в целом можно назвать коэффициентами влагопереноса.

Решение начально-краевой задачи (1) и (2) рассмотрим следующим образом [3, 4].

Учитываем, что функции $W(x, t)$, $D(W)$ и $K(W)$ являются аналитическими функциями, тогда их можно представить в виде ряда, в частности в окрестности точки, где W обращается в нуль т.е.

$$D\left(W\right)=D_0+D_1W+D_2W^2+D_3W^3+D_4W^4+\cdot...=\sum_{i=0}^{\infty}D_i\cdot W^i. \tag{3}$$

Функция $W(x, t)$ и $K(W)$ разлагаем в ряд по малому параметру ε в следующем виде

$$\begin{gathered}W(x,t)=W_0(x,t)\cdot\varepsilon+W_1(x,t)\cdot\varepsilon^2+W_2(x,t)\cdot\varepsilon^3+W_3(x,t)\cdot\varepsilon^4+...=\\=\sum_{i=0}^{\infty}W_i\,(x,\,t)\cdot\varepsilon^{i+1}\end{gathered} \tag{4}$$

$$K(W)=K_0W_0\cdot\varepsilon+K_1W_1\cdot\varepsilon^2+K_2W_2\cdot\varepsilon^3+K_3W_3\cdot\varepsilon^4+...=\sum_{i=0}^{\infty}K_iW_i\cdot\varepsilon^{i+1}, \tag{5}$$

где $W(x, t)$ – неизвестные функции.

Подставляя функции (3), (4) и (5) в уравнения (1) и производя ряд преобразований, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^i (где $i = 1, 2, \ldots$), получаем следующие системы уравнений:

$$\varepsilon:\frac{\partial W_0}{\partial t}-D_0\frac{\partial^2W_0}{\partial x^2}+K_0\frac{\partial W_0}{\partial x}=0$$

$$\varepsilon^2:\frac{\partial W_1}{\partial t}-D_0\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}+K_1\frac{\partial W_1}{\partial x}=D_1W_0\frac{\partial^2W_0}{\partial x^2}+D_1\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon^3:\frac{\partial W_2}{\partial t}-D_0\frac{\partial^2W_2}{\partial x^2}+K_2\frac{\partial W_2}{\partial x}=D_1W_0\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}+$$

$$+2D_1\frac{\partial W_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial x}+D_1W_1\frac{\partial^2W_0}{\partial x^2}+D_2W_0^2\frac{\partial^2W_0}{\partial x^2}+2D_2W_0\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon^4: \frac{\partial W_3}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} + K_3 \frac{\partial W_3}{\partial x} = \left(2D_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} + 4D_2 W_0 \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial W_0}{\partial x} +$$

$$+ \left(2D_1 W_1 + 3D_3 W_0^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 + \left(D_1 W_2 + 2D_2 W_0 W_1 + D_3 W_0^3 \right) \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} +$$

$$+ \left(D_1 W_1 + D_2 W_0^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + D_1 \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 + D_1 W_0 \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon^5: \frac{\partial W_4}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 W_4}{\partial x^2} + K_4 \frac{\partial W_4}{\partial x} =$$

$$= \left(2D_1 \frac{\partial W_3}{\partial x} + 4D_2 W_0 \frac{\partial W_2}{\partial x} + 4D_2 W_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + 6D_3 W_0^2 \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial W_0}{\partial x} +$$

$$+ \left(2D_2 W_2 + 6D_3 W_0 W_1 + 4D_4 W_0^3 \right) \cdot \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ \left(D_1 W_3 + D_2 W_1^2 + 2D_2 W_0 W_2 + 3D_3 W_0^2 W_1 + D_4 W_0^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} +$$

$$+2D_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} \frac{\partial W_1}{\partial x} + 2D_2 W_0 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left(D_1 W_2 + 2D_2 W_0 W_1 + D_3 W_0^3 \right) \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \qquad (6)$$

$$+ \left(D_1 W_1 + D_2 W_0^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + D_1 W_0 \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon^6: \frac{\partial W_5}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 W_5}{\partial x^2} + K_5 \frac{\partial W_5}{\partial x} =$$

$$+ \left(2D_1 \frac{\partial W_4}{\partial x} + 4D_2 W_0 \frac{\partial W_3}{\partial x} + 4D_2 W_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} + 4D_2 W_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} + 2D_2 W_3 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \right.$$

$$\left. +4D_3 W_0^2 \frac{\partial W_2}{\partial x} + 12 D_3 W_0 W_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial W_0}{\partial x} +$$

$$+ \left(3D_3 W_1^2 + 2D_3 W_0 W_2 + 5D_3 W_0^4 \right) \cdot \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ \left(D_1 W_4 + 2D_2 W_1 W_2 + 3D_3 W_0 W_1^2 + D_3 W_0^2 W_2 + D_5 W_0^5 \right) \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} +$$

$$+ \left(2D_1 \frac{\partial W_3}{\partial x} + 4D_2 W_0 \frac{\partial W_2}{\partial x} + 2D_2 W_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + 4D_4 W_0^3 \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial W_1}{\partial x} +$$

$$+ \left(2D_2 W_1 + 3D_3 W_0^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+\left(3D_3W_0^2W_1 + D_1W_3 + D_2W_1^2 + 2D_2W_0W_2 + D_4W_0^4\right)\cdot\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}+$$

$$+D_1\left(\frac{\partial W_2}{\partial x}\right)^2 + \left(D_1W_2 + 2D_2W_0W_1 + D_3W_0^3\right)\cdot\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}+$$

$$+\left(D_1W_1 + D_2W_0^2\right)\frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} + D_1W_0\frac{\partial^2 W_4}{\partial x^2}$$

. . . .

$$\varepsilon^{n+1}:\frac{\partial W_n}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + K_n\frac{\partial W_n}{\partial x} =$$

$$= G\left[W_0, W_1, ..., W_{n-1}, \frac{\partial W_0}{\partial x}, \frac{\partial W_1}{\partial x}, ..., \frac{\partial W_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial x^2}\right].$$

Соответственно начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{array}{ll}
W_0(x,t)\big|_{t=0} = Q_{00}(x) & 0 \le x \le h \\
W_0(x,t)\big|_{x=0} = Q_{00}(t) & 0 \le t \le T \\
W_0(x,t)\big|_{x=h} = Q_{01}(t) & 0 \le t \le T \\
W_1(x,t)\big|_{t=0} = Q_{01}(x) & 0 \le x \le h \\
W_1(x,t)\big|_{x=0} = Q_{01}(t) & 0 \le t \le T \\
W_1(x,t)\big|_{x=h} = Q_{11}(t) & 0 \le t \le T \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
W_n(x,t)\big|_{t=0} = Q_{0n}(x) & 0 \le x \le h \\
W_n(x,t)\big|_{x=0} = Q_{0n}(t) & 0 \le t \le T \\
W_n(x,t)\big|_{x=h} = Q_{nn}(t) & 0 \le t \le T
\end{array} \qquad (7)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (6), так называемое уравнение нулевого приближения т.е.

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + K_0\frac{\partial W_0}{\partial x} = 0. \qquad (8)$$

Следующими начальными и граничными условиями согласно соотношению (7)

$$\begin{aligned} &W_0(x,t)\big|_{t=0} = Q_{00}(x) \qquad 0 \le x \le h \\ &W_0(x,t)\big|_{x=0} = Q_{00}(t) \qquad 0 \le t \le T \\ &W_0(x,t)\big|_{x=h} = Q_{01}(t) \qquad 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{9}$$

Решение уравнения (8) ищем в автомодельной форме в виде функции

$$W_0(x,t) = (x+t)^m \cdot f(z), \tag{10}$$

где $z = \dfrac{1}{(x+t)^n}$.

Здесь m – показатель автомодельности.

Находим

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = (x+t)^{m-1}\left[m\, f(z) - n\, z\, f'(z)\right].$$

Частная производная $\dfrac{\partial W_0}{\partial x}$, идентичны производной $\dfrac{\partial W_0}{\partial t}$ т.е.

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} = (x+t)^{m-1}\left[m\, f(z) - n\, z\, f'(z)\right]$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = (x+t)^{m-2}\left[m(m-1)\, f(z) + (n-2m+1)\, n\, z\, f'(z) + n^2 z^2 f''(z)\right].$$

Подставляя $\dfrac{\partial W_0}{\partial t}$, $\dfrac{\partial W_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}$ в уравнение (8) получим

$$D_0 n^2 z^{2+\frac{1}{n}} f''(z) + \left[nz - D_0 n(m-1) z^{1+\frac{1}{n}} - D_0 n\, m z^{1+\frac{1}{n}} + D_0 n^2 z^{1+\frac{1}{n}} + K_0 n z \right] \cdot f'(z) +$$
$$+ \left[D_0 m(m-1) z^{\frac{1}{n}} - m - K_0 m \right] \cdot f(z) = 0.$$

Далее умножая на $\dfrac{z}{D_0}$ и для упрощения уравнения полагая $n = -1$ получим уравнение вида

$$z^2 f''(z) + \left[2m - \frac{1+K_0}{D_0} z \right] \cdot z\, f'(z) + \left[m(m-1) - \frac{1+K_0}{D_0} m\, z \right] \cdot f(z) = 0. \tag{11}$$

Здесь введем следующие обозначения

$$a = 2m;\ b = -\frac{1+K_0}{D_0};\ c = m(m-1);\ d = -\frac{m(1+K_0)}{D_0}. \tag{12}$$

Тогда получим уравнения вида

$$z^2 f''(z) + (a+bz)\cdot f'(z) + (c+dz) f(z) = 0. \tag{13}$$

Теперь решение уравнения (13) ищем в виде степенного ряда т.е.

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+\sigma}, \tag{14}$$

где $c_0 \neq 0$, σ – характеристический показатель, который подлежит определению c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) неизвестные коэффициенты.

Далее находим

$$\begin{gathered} f'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (i+\sigma) z^{i+\sigma-1} \\ f''(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (i+\sigma)(i+\sigma-1) z^{i+\sigma-2}. \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя функции (14) и (15) в уравнение (13) получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (i+\sigma)(i+\sigma-1) z^{i+\sigma} + \sum_{i=0}^{\infty} ac_i (i+\sigma) z^{i+\sigma} + \sum_{i=0}^{\infty} bc_i (i+\sigma) z^{i+\sigma+1} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} cc_i z^{i+\sigma} + \sum_{i=0}^{\infty} dc_i z^{i+\sigma+1} = 0.$$

Далее преобразуя последнее уравнение, получим

$$\begin{gathered} c_0(\sigma(\sigma-1) z^{\sigma} + \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} (i+\sigma+1)(i+\sigma) z^{i+\sigma+1} + a c_0 \sigma z^{\sigma} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} ac_{i+1} (i+\sigma+1) z^{i+\sigma+1} + \sum_{i=0}^{\infty} bc_i (i+\sigma) z^{i+\sigma+1} + c c_0 z^{\sigma} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} c c_{i+1} z^{i+\sigma+1} + \sum_{i=0}^{\infty} d c_i z^{i+\sigma+1} = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Теперь полагаем, что

$$c_0(\sigma(\sigma-1)z^{\sigma}+a\,c_0\sigma\,z^{\sigma}+c\,c_0z^{\sigma}=0,$$

тогда

$$c_0(\sigma(\sigma-1)+a\,c_0\sigma+c\,c_0=0,$$

где $c_0 \neq 0$.

$$\sigma^2+(a-1)\sigma+c=0. \qquad (17)$$

Получили уравнения для определения неизвестного характеристического показателя «σ».

Учитывая обозначения (12), из уравнения (17) получим уравнения

$$\sigma^2+(2m-1)\sigma+m(m-1)=0$$

$$\sigma_{1,2}=-\frac{2m-1}{2}\pm\sqrt{\frac{(2m-1)^2}{4}-m(m-1)}=-\frac{(2m-1)}{2}\pm\frac{1}{2}, \qquad (18)$$

где $\sigma_1=1-m,\ \sigma_2=-m.$ (19)

Таким образом, мы определили неизвестные характеристические показатели в виде корней (19). Тогда учитывая корни (19) из уравнения (16) получим

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_{i+1}(i+\sigma+1)(i+\sigma)z^{i+\sigma+1}+\sum_{i=0}^{\infty}ac_{i+1}(i+\sigma+1)z^{i+\sigma+1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}bc_i(i+\sigma)z^{i+\sigma+1}+\sum_{i=0}^{\infty}c\,c_{i+1}z^{i+\sigma+1}+\sum_{i=0}^{\infty}d\,c_iz^{i+\sigma+1}=0.$$

Отсюда, имеем

$$c_{i+1}(i+\sigma+1)(i+\sigma)+ac_{i+1}(i+\sigma+1)+bc_i(i+\sigma)+c\,c_{i+1}+d\,c_i=0.$$

Далее получим рекуррентную формулу для определения коэффициентов ряда c_i

$$c_{i+1}\left[(i+\sigma+1)(i+\sigma)+a(i+\sigma+1)+c\right]=-c_i\left[b(i+\sigma)+d\right]$$

$$c_{i+1}=\frac{b(i+\sigma)+d}{(i+\sigma+1)(i+\sigma)+a(i+\sigma+1)+c}c_i, \qquad (20)$$

где $c_0 \neq 0$ и можно полагать, что

$$c_0 = 1 \text{ и } a = 2m,\ b = -\frac{1+K_0}{D_0},\ c = m(m-1),\ d = -\frac{1+K_0}{D_0}m,\ \sigma_1 = 1-m,\ \sigma_2 = -m.$$

При $\sigma_1 = 1 - m$ из формулы (20) получим

$$c_{i+1} = \frac{1+K_0}{D_0(i+2)}c_i. \tag{21}$$

При $\sigma_2 = -m$ из формулы (20) получим

$$c_{i+1} = \frac{1+K_0}{D_0(i+1)}c_i. \tag{22}$$

Например, при $i = 0$, где $c_0 = 1$, получим соответственно из (21) и (22)

$$C_1 = \frac{1+K_0}{2D_0} \text{ и } C_1 = \frac{1+K_0}{D_0},$$

при $i = 1$ получим

$$C_2 = \frac{(1+K_0)^2}{6D_0^2} \text{ и } C_2 = \frac{(1+K_0)^2}{2D_0^2},$$

при $i = 2$ получим

$$C_3 = \frac{(1+K_0)^3}{24D_0^3} \text{ и } C_3 = \frac{(1+K_0)^3}{6D_0^3} \text{ и т.д.}$$

Следует отметить, что ряд (14) является сходящимся рядом при $-1 < z < 1$.

Таким образом, частные решения уравнения (11) можно записать в виде функции:

при $\sigma_1 = 1 - m$

$$f_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+1-m}, \tag{23}$$

при $\sigma_2 = -m$

$$f_2(z)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i-m}. \qquad (24)$$

Тогда общее решения можно представить в виде функции

$$f(z)=A\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+1-m}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i-m}, \qquad (25)$$

где A и B произвольные постоянные, c_i – определяется из формул (21) и (22).

Подставляя функцию (25) в формулу (10) получим:

$$W_0(x,t)=(x+t)^{2m}\left[A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-1}\right], \qquad (26)$$

где A и B произвольные постоянные определяемые согласно начальным и граничным условиям (9), c_i – коэффициенты степенного ряда определяемые с помощью рекуррентных формул (21) и (22), m – показатель автомодельности.

Функция (26) является решением уравнения (8), т.е. решением первого уравнения системы (6). Таким образом, решения уравнения инфильтрации (1) при начальных и граничных условиях (2) можно записать в виде функции (26).

Таблица 1

Перечень решений уравнения (8) при различных значениях показателя автомодельности

«m»	$(x+t)^{2m}$	согласно граничным условиям	$W_0(x,t)=(x+t)^{2m}\left[A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-1}\right]$
M = -3	$(x+t)^{-6}$	$A\neq 0, B=0$	$W_0(x,t)=A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i+6}$
M = -2	$(x+t)^{-4}$	$A\neq 0, B\neq 0$	$W_0(x,t)=A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i+4}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i+3}$
M = -1	$(x+t)^{-2}$	$A\neq 0, B\neq 0$	$W_0(x,t)=A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i+2}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i+1}$
M = 0	1	$A\neq 0, B\neq 0$	$W_0(x,t)=A\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i}+B\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-1}$

Окончание таблицы 1

$M = 1$	$(x+t)^2$	$A \neq 0, B \neq 0$	$W_0(x,t) = A\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-2} + B\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-3}$
$M = 2$	$(x+t)^4$	$A \neq 0, B \neq 0$	$W_0(x,t) = A\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-4} + B\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-5}$
$M = 3$	$(x+t)^6$	$A \neq 0, B \neq 0$	$W_0(x,t) = A\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-6} + B\sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{1}{x+t}\right)^{i-7}$

Список литературы:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.

2. Полубаринова-Кочиа П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М. Наука, 1977.

3. Бийбосунов Б.И. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. – Бишкек: Илим, 1998.

4. Бийбосунов Б.И. Моделирование и решение оптимизационных задач напорной фильтрации при сложном строении грунта. – Бишкек: Илим, 1998.