УДК.532.546

ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДВУМЕРНОЙ ИНФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ГОРНЫХ СКЛОНАХ

Бийбосунов Б.И., д.ф.-м.н., профессор, КГУ им. И. Арабаева, Кыргызстан, 720026, Бишкек, ул. Раззакова, 51;
Уметалиев М.У., к.ф.-м.н., доцент, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан,720044, Бишкек, пр. Мира 66;
Бексултанов Ж.Т., к.ф.-м.н., КГУ им. И. Арабаева, Кыргызстан, 720026, Бишкек, ул. Раззакова, 51

Исследуются процессы инфильтрации жидкости в нескальных горных склонах, подверженных оползневой опасности. Физический процесс инфильтрации жидкости, возникающий за счет атмосферных осадков, снеготаяния, поверхностного стока моделируется в виде нелинейной начально-краевой задачи в двумерной постановке, для решения которой применяется приближенно-аналитический метод, позволяющий находить частные решения в автомодельной форме.

Ключевые слова: жидкость, фильтрация, инфильтрация, оползень, оползневые склоны, нестационарное уравнение.

APPROXIMATE ANALYTICAL CALCULATION OF TWO-DIMENSIONAL INFILTRATION OF LIQUID AT HILLSIDES

Biibosunov B.I., professor, Kyrgyzstan, 720026, c. Bishkek, KSU named after I. Arabaev;
Umetaliev MU., PhD, Associate Professor, Kyrgyzstan,720044, c.Bishkek, KSTU named after I.Razzakov;
Beksultanov J.T., PhD, Associate Professor, Kyrgyzstan, 720026, c. Bishkek, KSU named after I. Arabaev

There are researched the processes of liquid infiltration at wascally hillsides, affected by landslide risk. Physical process of liquid infiltration, occurred at the account of atmospheric sludge, snow melting, surface runoff is modelled as non-linear initial boundary value problem in two-dimensional formulation, for the solution of which is used approximate analytical method of solution, allowing to find prtial solutions in automodel form.

Keywords: liquid, filtration, infiltration, landslide, landslide slopes, nonstationary equation.

Предварительное изучение оползневых процессов, которые произошли на территории республики, показали, что основными факторами, определяющими развитие и активизацию оползневых явлений, являются процессы насыщения основной массы горных пород влагой как за счет подземных и грунтовых вод, так и за счет выпадения осадков, снеготаяния, поверхностного стока на склонах и т.д. Таким образом, значительное влияние на процессы формирования и активизации оползней Кыргызстана оказывают фильтрационные и инфильтрационные течения жидкости в горных склонах.

Математически процесс инфильтрации или движение жидкости в ненасыщенных средах можно моделировать относительно функции влажности для плоского случая в виде квазилинейного уравнения:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial y}\right]+\frac{\partial K(W)}{\partial y} \qquad (1)$$

Начально-краевые условия, налагаемые на искомую функцию влажности, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&W(x,y,t)\big|_{t=0}=W_0(x,y) && 0\le t\le T\\
&W(x,y,t)\big|_{x=0}=f_0(y,t) && 0\le x\le H\\
&W(x,y,t)\big|_{x=h}=f_h(y,t) && \\
&W(x,y,t)\big|_{y=0}=g_0(x,t) && 0\le y\le H'\\
&W(x,y,t)\big|_{y=h'}=g_{h'}(x,t) &&
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь W(x, y, t) - искомая функция влажности, D(W) - коэффициент диффузии, K(W) - коэффициент влагопроводности (см. [2] – [3]).

Учитывая, что функции W(x, y, t), D(W), K(W) являются аналитическими, их можно представить в виде ряда в окрестности точки, где W(x, y, t) обращается в нуль. Тогда имеем:

$$D(W) = D_0 + D_1W + D_2W^2 + D_3W^3 + D_4W^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cdot W^i \tag{3}$$

Далее функции W(x, y, t) и K(W) разлагаем в ряд по малому параметру ε в виде:

$$W(x,y,t) = W_0(x,y,t)\cdot\varepsilon + W_1(x,y,t)\cdot\varepsilon^2 + W_2(x,y,t)\cdot\varepsilon^3 + W_3(x,y,t)\cdot\varepsilon^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} W_i(x,y,t)\cdot\varepsilon^{i+1} \tag{4}$$

$$K(W) = K_0W_0\cdot\varepsilon + K_1W_1\cdot\varepsilon^2 + K_2W_2\cdot\varepsilon^3 + K_3W_3\cdot\varepsilon^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} K_iW_i\cdot\varepsilon^{i+1} \tag{5}$$

Подставляя функции (3), (4) и (5) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие системы уравнений:

а) $$\varepsilon: \frac{\partial W_0}{\partial t} - D_0\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right) - K_0\frac{\partial W_0}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

б) $$\varepsilon^2: \frac{\partial W_1}{\partial t} - D_0\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}\right) - K_1\frac{\partial W_1}{\partial y} = D_1\left[\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right)W_0 + \left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)^2\right]$$

…………………………………………………………………………………………………

n) $$\varepsilon^{n+1}: \frac{\partial W_n}{\partial t} - D_0\left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial y^2}\right) - K_n\frac{\partial W_n}{\partial y} = G\Bigg[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}; D_1, D_2, \dots, D_{n-1}; \frac{\partial W_0}{\partial x}, \frac{\partial W_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial W_{n-1}}{\partial x}; \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial x^2}; \frac{\partial W_0}{\partial y}, \frac{\partial W_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial W_{n-1}}{\partial y}; \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial y^2}; \frac{\partial W_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial y}, \frac{\partial W_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial W_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial W_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial W_{n-2}}{\partial y}\Bigg]$$

Соответственно начальные и граничные условия имеют вид:

а)
$$\begin{aligned}
&W_0(x,y,t)\big|_{t=0} = W_{00}(x,y) && 0 \le t \le T\\
&W_0(x,y,t)\big|_{x=0} = f_{00}(y,t) &&\\
&W_0(x,y,t)\big|_{x=h} = f_{0h}(y,t) && 0 \le x \le H\\
&W_0(x,y,t)\big|_{y=0} = g_{00}(x,t) &&\\
&W_0(x,y,t)\big|_{y=h'} = g_{0h'}(x,t) && 0 \le y \le H'
\end{aligned} \tag{7}$$

б)
$$\begin{aligned}
&W_1(x,y,t)\big|_{t=0} = W_{01}(x,y) && 0 \le t \le T\\
&W_1(x,y,t)\big|_{x=0} = f_{01}(y,t) &&\\
&W_1(x,y,t)\big|_{x=h} = f_{1h}(y,t) && 0 \le x \le H\\
&W_1(x,y,t)\big|_{y=0} = g_{01}(x,t) &&\\
&W_1(x,y,t)\big|_{x=h'} = f_{1h'}(x,t) && 0 \le y \le H'
\end{aligned}$$

……………………………………………………………

n)
$$\begin{aligned}
&W_n(x,y,t)\big|_{t=0} = W_{0n}(x,y) && 0 \le t \le T\\
&W_n(x,y,t)\big|_{x=0} = f_{0n}(y,t) &&\\
&W_n(x,y,t)\big|_{x=h} = f_{nh}(y,t) && 0 \le x \le H\\
&W_n(x,y,t)\big|_{y=0} = g_{0n}(x,t) &&\\
&W_n(x,y,t)\big|_{x=h'} = f_{nh'}(x,t) && 0 \le y \le H'
\end{aligned}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (6), так называемое уравнение нулевого приближения, т.е.

$\partial W_0 \quad \left(\partial^2 W \quad \partial^2 W\right) \quad \partial W$ при на чаль но- краевых условиях:

$$\frac{}{\partial t} - D_0\left(\frac{{}_0}{\partial x^2} + \frac{{}_0}{\partial y^2}\right) + K_0\frac{{}_0}{\partial y} = 0 \qquad (8)$$

$$
\begin{aligned}
&W_0(x,y,t)\big|_{t=0} = W_{00}(x,y) && 0 \le t \le T \\
&W_0(x,y,t)\big|_{x=0} = f_{00}(y,t) && \\
&W_0(x,y,t)\big|_{x=h} = f_{0h}(y,t) && 0 \le x \le H \\
&W_0(x,y,t)\big|_{y=0} = g_{00}(x,t) && \\
&W_0(x,y,t)\big|_{y=h'} = g_{0h'}(x,t) && 0 \le y \le H'
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Решение начально-краевой задачи (8) – (9) ищем в автомодельной форме в виде функции:

$$W(x,y,t) = (x+y+t)^m \cdot f(z) \text{ где } z = \frac{1}{(x+y+t)^n} \tag{10}$$

Здесь m – показатель автомодельности. Находим частные производные:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t},\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}$$

и подставляя их в уравнение (8), после ряда несложных преобразований получим уравнение следующего вида:

$$f'(z) + \left[\frac{n-2m+1}{n} - \frac{K_0-1}{2D_0 n}\cdot z^{-\frac{1}{n}}\right]\cdot z^{-n}\cdot f'(z) + \left[\frac{m(m-1)}{n^2} - \frac{m(K_0-1)}{2D_0 n^2}\cdot z^{-\frac{1}{n}}\right]\cdot\frac{1}{z^{2n}} f(z) = 0 \tag{11}$$

Полагая в уравнении (11) n =1, получим:

$$z^3 f'(z) + \left[2(1-m)\cdot z + \frac{K_0-1}{2D_0}\right]\cdot z\cdot f'(z) + \left[m(m-1)z + \frac{m(K_0-1)}{2D_0}\right] f(z) = 0 \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$a = 2(1-m);\ b = \frac{K_0-1}{2D_0};\ c = m(m-1);\ d = \frac{m(K_0-1)}{2D_0} \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) запишется в виде [1]:

$$z^3 f'(z) + (az+b)\cdot z\cdot f'(z) + (cz+d)\, f(z) = 0 \tag{14}$$

Полагая:

$$f(z) = z^K \cdot U(z) \text{ где } K = -\frac{d}{b} = -m \text{ т.е.}$$

$$f(z) = z^{-m}\cdot U(z) \tag{15}$$

получим из уравнения (14) следующее уравнение:

$$z^3U'(z) + \left[(a-2m)\cdot z + b\right]\cdot z\cdot U'(z) + \left[(m(m+1)-ma+c)\cdot z + (d-bm)\right]U(z) = 0 \tag{16}$$

Как видно, d – bm = 0, тогда из последнего уравнения получим уравнения вида:

$$z^2U'(z) + \left[(a-2m)\cdot z + b\right]\cdot U'(z) + \left[-m(a-m-1)+c)\right]U(z) = 0 \tag{17}$$

Далее для дальнейшего упрощения полагаем:

$$U(z) = e^{\xi}\xi^{\upsilon}\eta(\xi) \text{ где } \xi = Z^{-1} \tag{18}$$

Тогда из уравнения (17) получим уравнение:

$$
\begin{gathered}
\xi^2\eta'(\xi) + \left[(2-b)\xi + (2\upsilon+2-a)\right]\xi\cdot\eta'(\xi) + \\
\left[(1-b)\xi + 2\upsilon + 2 - a - b\upsilon\right]\xi\cdot\eta(\xi) + \left[\upsilon^2 + (1-a)\upsilon + c\right]\cdot\eta(\xi) = 0
\end{gathered}
\tag{19}
$$

В последнем уравнении потребуем, чтобы

$$\upsilon^2 + (1-a)\upsilon + c = 0 \tag{20}$$

Учитывая обозначения, из уравнения (20) получим:

$$\upsilon^2 + (2m-1)\upsilon + m(m-1) = 0\,, \tag{21}$$

корнями которого будут:

$$\upsilon_1 = 1-m; \quad \upsilon_2 = -m \tag{22}$$

Учитывая уравнение (20), из уравнения (19) получим:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[(2-b)\xi + (2\upsilon+2-a)\right] \cdot \eta'(\xi) + \left[(1-b)\xi + (2\upsilon+2-a-b\upsilon)\right] \cdot \eta(\xi) = 0 \tag{23}$$

Для упрощения уравнения (23) полагаем, что:

$$\eta(\xi) = e^{\frac{b-3}{2}\xi} \cdot \varphi(\xi) \tag{24}$$

Подставляя функцию (24) в уравнение (23), после преобразования получаем:

$$\xi \cdot \varphi''(\xi) + \left[(2\upsilon+2-a) - \xi\right] \cdot \varphi'(\xi) + \left[\frac{1-b^2}{4}\xi + \frac{a+b(2-a)-2(\upsilon+1)}{2}\right] \cdot \varphi(\xi) = 0 \tag{25}$$

В последнем уравнении во избежание громоздких вычислений связываем коэффициенты влагопроводности и диффузивности соотношением $K_0 = 1 - 2D_0$, что вполне соответствует физическому толкованию, следовательно, $b = -1$. Тогда из последнего уравнения получаем:

$$\xi \cdot \varphi''(\xi) + \left[(2\upsilon + 2 - a) - \xi\right] \cdot \varphi'(\xi) + (\upsilon + 2 - a) \cdot \varphi(\xi) = 0 \tag{26}$$

Введем обозначения

$$p = 2\upsilon + 2 - a; \qquad q = \upsilon + 2 - a \tag{27}$$

и из последнего уравнения имеем

$$\xi \cdot \varphi''(\xi) + (p - \xi) \cdot \varphi'(\xi) + q \cdot \varphi(\xi) = 0, \tag{28}$$

решение которого запишется в виде:

$$\varphi(\xi) = A_1 \cdot \Phi_1(q; p; \xi) + A_2 \cdot \xi^{1-p} \Phi_2(q - p + 1; 2 - p; \xi)\,, \tag{29}$$

где A_1 и A_2 - произвольные постоянные; Φ_1 и Φ_2 - вырожденные гипергеометрические функции. Подставляя функцию (29) в формулу (24), найдем:

$$\eta(\xi) = e^{-2\xi} \cdot \left[A_1 \cdot \Phi_1(q; p; \xi) + A_2 \cdot \xi^{1-p} \Phi_2(q - p + 1; 2 - p; \xi)\right], \tag{30}$$

где $\xi = Z^{-1}$. Далее, подставляя функцию (30) в соотношение (18), получаем функцию:

$$U(z) = e^{-\frac{1}{z}} \cdot z^{-\upsilon} \left[A_1 \cdot \Phi_1(q; p; z^{-1}) + A_2 \, z^{p-1} \Phi_2(q - p + 1; 2 - p; z^{-1})\right] \tag{31}$$

Теперь, подставляя функцию (31) в формулу (15), найдем решение уравнения (14):

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \cdot z^{-\upsilon-m} \left[A_1 \cdot \Phi_1(q; p; z^{-1}) + A_2 \, z^{p-1} \Phi_2(q - p + 1; 2 - p; z^{-1})\right], \tag{32}$$

где A_1 и A_2 - произвольные постоянные; Φ_1 и Φ_2 - вырожденные гипергеометрические функции; *m* - показатель автомодельности; υ определяется по формуле (22), *p* и *q* – формулой (27). Теперь, учитывая корни $\upsilon_1 = 1 - m$, $\upsilon_2 = - m$, определяем параметры *p* и *q:*

при $\upsilon_1 = 1 - m; \quad q_1 = 1 + m, \quad p_1 = 2$

при $\upsilon_2 = -m; \quad q_2 = m, \quad p_2 = 0$

Как видно, при υ = – m второй параметр p = 0. Это означает, что при υ = – m, решение уравнения не существует. При υ = 1 – m, второй параметр p = 2 – это целое число. Тогда согласно теории вырожденных гипергеометрических функций следует, что если второй параметр вырожденной гипергеометрической функции, т.е. p – является целым числом, то гипергеометрическая функция Ф дает лишь одно решение вырожденного гипергеометрического уравнения, следовательно, второго решения не существует. Поэтому, ввиду целочисленности параметра *p* = 2, ограничимся только первым решением, которое запишется в виде:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \cdot z^{-\upsilon - m} A_1 \cdot \Phi(1 - m; 2; z^{-1}), \tag{33}$$

где A_1 – произвольная постоянная.

Подставляя функцию (33) в соотношение (10), получим решение уравнения (8) окончательно в виде функции:

$$_0 \qquad W\ (x, y, t) = Ae^{-(x+y+t)} \cdot (x + y + t)^{1+m} \cdot \Phi(1 + m; 2; (x + y + t)), \qquad (34)$$

где A - произвольная постоянная, определяемая согласно начально-краевым условиям (2), Ф - вырожденная гипергеометрическая функция.

Список литературы

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М., Наука, 1976 г.
2. Полубаринова – Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.- М., Наука, 1977 г.
3. Бийбосунов Б., Уметалиев М. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах.- Бишкек, Илим, 1998 г.