ФИЗИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ

Бийбосунов Б.И., Уметалиев М.У., Бексултанов Ж.Т.

КӨЧКҮ БЕТТЕРИНДЕГИ СТАЦИОНАРДЫК ЭМЕС ФИЛЬТРАЦИЯНЫН БАШТАПКЫ - ЧЕТКИ МАСЕЛЕЛЕРИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН - АНАЛИТИКАЛЫК ЭСЕПТӨӨ

Бийбосунов Б.И., Уметалиев М.У., Бексултанов Ж.Т.

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОПОЛЗНЕВЫХ СКЛОНОВ

B.I. Biibosunov, M.U. Umetaliev, Zh.T. Beksultanov

APPROXIMATELY ANALYTICALLY CALCULATION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN NON-STATIONARY FILTRATION SLIDING SLOPES

УДК: 532.546

Берилген статьяда бир тектүү эмес – анизотроптуу чөйрөдөгү суюктуктун стационардык эмес фильтрациясын чыгаруу каралган. Стационардык эмес фильтрациянын, баштапкы – четки маселелер түрүндө берилген, математикалык модели эки ыкма менен чыгарылган: автомодельдик формада жана даражалуу катарлардын жардамы менен.

In this paper, we consider the solution of unsteady filtration fluid in heterogeneous anisotropic medium. Mathematical model of non-stationary filtration, presented in the form of the initial-boundary value problem is solved in two ways: in the form of self and with the help of a power series.

Кыргыз Республикасынын аймагында болуп өткөн көчкү кубулуштарын изилдөө, алардын пайда болуу жана активтенүү негизги факторлорун анализдөө көрсөткөндөй ошол аймактын рельефи жана геологиялык шарттары менен бирге гидрогеологиялык шарттары дагы чечүүчү роль ойной тургандыгы белгилүү. Ошол эле учурда, геологиялык шарттар жана аймактын рельефи көчкү кубулушунун калыптануусунун зарыл шарттары болуп эсептелет. Ал эми гидрогеологиялык жана метеорологиялык ж.б. шарттардын негизинде көчкү коркунучун туудуручу тоо беттеринде суюктуктун сиңүүсү же кыймылы жүрөт. Бул иште бир тектүү эмес чөйрөдөгү суюктуктун стационардык эмес фильтрациясы изилденет жана автомоделдик формада фильтрация теңдемесинин чыгарылышын алуунун эки ыкмасы берилген.

Баштапкы четки маселелери түрүндө көгөзүлгөн фильтрациянын математикалык моделин карайлы

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_1(x;y)\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_2(x;y)\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right] \tag{1}$$

төмөндөгүдөй баштапкы жана чектик шарттарда:

$$\begin{array}{ll} H(x,y,t)\big|_{t=0} = H_0(x,y) & 0 \le t \le T \\ H(x,y,t)\big|_{x=N_1} = H_{1,0}(t,y) & H(x,y,t)\big|_{x=N_2} = H_{1,1}(t,y) \\ H(x,y,t)\big|_{y=N_1'} = H_{2,0}(x,t) & H(x,y,t)\big|_{y=N_2'} = H_{2,1}(x,t) \\ N_1 \le x \le N_2 & N_1' \le y \le N_2' \end{array} \tag{2}$$

Мында $H(x,y,t)$ – изделүүчү басым күчүнүн функциясы, фильтрация коэффициенттери $K_1(x;y) = 2(x+y)^s$ жана $K_2(x;y) = (x+y)^s$, $K_1(x;y) \ne K_2(x;y)$

(1), (2) четки маселелеринин чыгарылышын төмөндөгүдөй автомодельдик формасы турүндө издейбиз:

$$H(x,y,t) = (x+y)^m \cdot f(z), \text{ мында } z = \frac{t}{(x+y)^n} \tag{3}$$

Бул жерде m – автомодельдүүлүктүн көрсөткүчү.

Туундуларын табабыз

$$\frac{\partial H}{\partial t}=(x+y)^{m-n}\cdot f'(z);$$
$$\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x}=2s(x+y)^{s-1}; \qquad \frac{\partial K_2(x,y)}{\partial y}=s(x+y)^{s-1};$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}=m(x+y)^{m-1}\cdot f(z)-n(x+y)^{m-n-1}\cdot t\cdot f'(z); \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=m(m-1)(x+y)^{m-2}\cdot f(z)-(2m-n-1)\cdot n\cdot t\cdot(x+y)^{m-n-2}\cdot f'(z)+$$
$$+n^2(x+y)^{m-2n-2}\cdot t^2\cdot f''(z).$$

$\frac{\partial H}{\partial y};\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ туюнтмалары жогорудагы көргөзүлгөн жекече туундуларга окшош болот.

(4) табылган жекече туундуларды (1) теңдемесине коюп, өтө татаал эмес өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзгөндөн кийин,

$$\frac{1}{3}\cdot(x+y)^{-n-s+2}\cdot f'(z)=m\cdot s\cdot f(z)-n(x+y)^{-n}\cdot s\cdot t\cdot f'(z)+m(m-1)\cdot f(z)-$$
$$-(2m-n-1)\cdot n\cdot t\cdot(x+y)^{-n}f'(z)+n^2t^2(x+y)^{-2n}\cdot f''(z)$$

алабыз.

Жөнөкөйлөтүү максатында $s=-(n-2)$ болсун дейли жана тийешелүү кыскартууларды жүргүзгөндөн кийин,

$$z^2\cdot f''(z)+\left[\frac{2n-2m-1}{n}\cdot z-\frac{1}{3n^2}\right]\cdot f'(z)+\frac{m(m-n+1)}{n^2}\cdot f(z)=0 \tag{5}$$

алынат. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизелик:

$$a=\frac{2n-2m-1}{n};\; b=-\frac{1}{3n^2};\; c=\frac{m(m-n+1)}{n^2}\cdot \tag{6}$$

Анда (5) теңдемеси,

$$z^2\cdot f''(z)+(az+b)\cdot f'(z)+c\cdot f(z)=0 \tag{7}$$

түрүнө келет.

Берилген теңдемени чыгаруу үчүн кийинкидей ордуна коюларды жана өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз

$$f(z)=\ell^{\xi}\cdot\xi^{v}\cdot\eta(\xi),\;\xi=z^{-1}. \tag{8}$$

Анда (7) теңдемеси төмөндөгүдөй түргө келет:

$$\xi^2\cdot\eta''(\xi)+\left[(2-b)\xi+2v+2-a)\right]\cdot\xi\cdot\eta'(\xi)+\left[(1-b)\cdot\xi+2v+2-a-bv\right]\cdot\xi\cdot\eta(\xi)+$$
$$+\left[v^2+v(1-a)+c\right]\cdot\eta(\xi)=0 \tag{9}$$

(9) теңдемесин жөнөкөйлөтүү үчүн, v га карата төмөндөгүдөй барабардык орун алсын дейлик

$$v^2+v(1-a)+c=0 \tag{10}$$

(10) теңдемесинен (6) белгилөөлөрдү эске алсак,

$$v^2+v\frac{2m-n+1}{n}+\frac{m(m-n+1)}{n^2}=0 \tag{11}$$

теңдемесине ээ болобуз жана анын тамырлары

$$v_1=-\frac{m-n+1}{n} \qquad v_2=-\frac{m}{n} \tag{12}$$

Анда (9) теңдемесиндеги (10) теңдемесинен төмөндөгїгө ээ болобуз

$$\xi\cdot\eta''(\xi)+\left[(2-b)\xi+2v+2-a)\right]\cdot\eta'(\xi)+\left[(1-b)\cdot\xi+2v+2-a-bv\right]\cdot\eta(\xi)=0 \tag{13}$$

Андан ары акыркы теңдемеден,

$$\eta(\xi)=\ell^{\frac{b-3}{2}\xi}\cdot u(\xi) \tag{14}$$

(14) барабардыгы орун алсын деп жөнөкөйлөтүүлөрдү жүргүзөбүз.

Анда кийинки түрдөгү теңдемени алабыз

$$\xi\cdot u''(\xi)+\left[(2v+2-a)-\xi\right]\cdot u'(\xi)+\left[\frac{1-b^2}{4}\cdot\xi+\frac{a+b(2-a)-2(v+1)}{2}\right]\cdot u=0 \tag{15}$$

Акыркы теңдемеден b = - 1 болсун деп болжолдоп (бул фильтрациянын коэффициенттерин физикалык түшүндүрүүдө толугу менен болушу мүмкүн), төмөндөгүдөй гипергеометриялык теңдемесин алабыз:

$$\xi\cdot u''(\xi)+\left[(2v+2-a)-\xi\right]\cdot u'(\xi)-(v+2-a)\cdot u(\xi)=0 \quad (16)$$

Жаңы белгилөөлөрдү киргизелик

$$p=2v+2-a \qquad q=v+2-a. \quad (17)$$

Анда акыркы теңдеме,

$$\xi\cdot u''(\xi)+(p-\xi)\cdot u'(\xi)-q\cdot u(\xi)=0 \quad (18)$$

түрүнө өзгөртүлөт жана анын чыгарылышы төмөндөгү түрдө жазылат:

$$u(\xi)=C_1^0\cdot F(q,p,\xi)+C_2^0\cdot\xi^{1-p}\cdot F(q-p+1,2-p,\xi) \quad (19)$$

мында C_1^0 жана C_2^0 - каалагандай турактуулар, F – гипергеометриялык функциялар.

Андан ары, (17) белгилөөсүн жана (11) теңдемесинин (12) тамырларын эске алып,

$$v_1=-\frac{m-n+1}{n}\ \text{болгондо,}\ p=\frac{2n-1}{n}; \qquad q=\frac{m+n}{n}. \quad (20)$$

$$v_2=-\frac{m}{n}\ \text{болгондо,} \qquad p=\frac{1}{n}; \qquad q=\frac{m+1}{n}. \quad (21)$$

алабыз. Бул жерде, (20) жана (21) параметрлеринин маанилери аркылуу (19) чыгарылышы төмөндөгүдөй түрдө туюнтулат:

$v_1=-\dfrac{m-n+1}{n}$ болгондо, (20) чыгарылышы

$$u(\xi)=C_1^0\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\xi\right)+C_2^0\cdot\xi^{-\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\xi\right) \quad (22)$$

түрүндө, $v_2=-\dfrac{m}{n}$ болгондо, (21) чыгарылышы

$$u(\xi)=C_1^1\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\xi\right)+C_2^1\cdot\xi^{\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\xi\right) \quad (23)$$

түрүндө болот, мында C_1^0, C_2^0 жана C_1^1, C_2^1 - каалагандай турактуулар, F –гипергеометриялык функциялар.

Эми табылган (22) жана (23) чыгарылыштарын (14) формуласына коюп, тиешелүү түрдө,

$v_1=-\dfrac{m-n+1}{n}$ болгондо,

$$\eta(\xi)=\ell^{-2\xi}\left[C_1^0\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\xi\right)+C_2^0\cdot\xi^{-\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\xi\right)\right] \quad (24)$$

ээ болобуз, $v_2=-\dfrac{m}{n}$ болгондо,

$$\eta(\xi)=\ell^{-2\xi}\left[C_1^1\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\xi\right)+C_2^1\cdot\xi^{\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\xi\right)\right] \quad (25)$$

ээ болобуз.

Андан ары, акыркы (24) жана (25) чыгарылыштарын (8) формуласына коюп, тиешелүү түрдө төмөндөгүдөй (5) теңдемесинин чыгарылыштарын алабыз:

$v_1=-\dfrac{m-n+1}{n}$ болгондо,

$$f(z)=\ell^{-\frac{1}{z}}\cdot z^{\frac{m-n+1}{n}}\left[C_1^0\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},z^{-1}\right)+C_2^0\cdot z^{\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},z^{-1}\right)\right] \quad (26)$$

$v_2=-\dfrac{m}{n}$ болгондо,

$$f(z)=\ell^{-\frac{1}{z}}\cdot z^{\frac{m}{n}}\left[C_1^1\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},z^{-1}\right)+C_2^1\cdot\xi^{-\frac{n-1}{n}}\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},z^{-1}\right)\right] \quad (27)$$

Акырында, (26) жана (27) функцияларын (3) формуласына коюп, (1) теңдемесинин эки чыгарылышын төмөндөгүдөй түрдө алабыз:

$v_1=-\dfrac{m-n+1}{n}$ болгондо, чыгарылышы

$$H(x,y,t)=\ell^{-\frac{(x+y)^n}{t}}\cdot t^{\frac{m-n+1}{n}}\cdot(x+y)^{n-1}\left[C_1^0\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\frac{(x+y)^n}{t}\right)+\right.$$
$$\left.+C_2^0\cdot\frac{t^{\frac{n-1}{n}}}{(x+y)^{n-1}}\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\frac{(x+y)^n}{t}\right)\right] \qquad (28)$$

$v_2=-\frac{m}{n}$ болгондо, чыгарылышы

$$H(x,y,t)=\ell^{-\frac{(x+y)^n}{t}}\cdot t^{\frac{m}{n}}\cdot\left[C_1^1\cdot F\left(\frac{m+1}{n},\frac{1}{n},\frac{(x+y)^n}{t}\right)+\right.$$
$$\left.+C_2^1\cdot\frac{(x+y)^{n-1}}{t^{\frac{n-1}{n}}}\cdot F\left(\frac{m+n}{n},\frac{2n-1}{n},\frac{(x+y)^n}{t}\right)\right] \qquad (28)$$

мында C_1^0, C_2^0 жана C_1^1, C_2^1 - (2) баштапкы – чектик шарттарынын негизинде аныкталган каалагандай турактуулар, F – гипергеометриялык функциялар.

II. Теңдеменин даражалык катардын жардамы менен чыгарылышын көргөзөлүк.

(7) теңдемесин карайлык б.а.

$$z^2\cdot f''(z)+(az+b)\cdot f'(z)+c\cdot f(z)=0 \qquad (30)$$

мында

$$a=\frac{2n-2m-1}{n};\ b=-\frac{1}{3n^2};\ c=\frac{m(m-n+1)}{n^2}. \qquad (31)$$

Берилген теңдеменин чыгарылышын төмөндөгүдөй катар түрүндө издейли:

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i z^{i+\sigma} \qquad (32)$$

мында C_i- катардын коэффициенттери жана σ - параметр, алар аныктоону талап кылуучу белгисиз чоңдуктар.

Туундусун табабыз

$$f'(z)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i(i+\sigma)z^{i+\sigma-1}$$
$$f''(z)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i(i+\sigma)(i+\sigma-1)z^{i+\sigma-2} \qquad (33)$$

(32) жана (33) функцияларын (30) теңдемесине коюп, татаал эмес өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзгөндөн кийин,

$$\sum_{i=0}^{\infty}C_i(i+\sigma)(i+\sigma-1)z^{i+\sigma}+a\cdot\sum_{i=0}^{\infty}C_i(i+\sigma)z^{i+\sigma}+b\cdot C_0\cdot\sigma\cdot z^{\sigma-1}+$$
$$+b\cdot\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+1}(i+\sigma+1)\cdot z^{i+\sigma}+c\cdot\sum_{i=0}^{\infty}C_i\cdot z^{i+\sigma}=0 \qquad (34)$$

алабыз.

$$b\cdot C_0\cdot\sigma\cdot z^{\sigma-1}=0 \qquad (35)$$

барабардыгы орун алсын дейлик, мында $b\neq 0,\quad C_0\neq 0$, демек $\sigma=0$. (36)

$\sigma=0$ маанисин эске алып, (34) барабардыгынан (32) катардын коэффициенттерин аныктоо үчүн рекуренттик формуланы алабыз

$$C_{i+1}=-\frac{i(i-1)+ai+c}{b(i+1)}\cdot C_i \qquad (37)$$

(31) белгилөөсүн эске алып, (37) формуласынан

$$C_{i+1}=3\cdot\frac{ni\left[n(i-1)+2n-2m-1\right]+m(m-n+1)}{i+1}\cdot C_i \qquad (38)$$

алабыз.

$C_0\neq 0,\quad C_0=1$ болсун десек,

$i = 0$ үчүн,

$$C_1 = 3m(m - n + 1)$$

$i = 1$ үчүн,

$$C_2 = \frac{n(n-1) + (n-m)(n-2m)}{2} \cdot 3m(m - n + 1)$$

ж. б. у. с. ээ болобуз.

Анда (30) тещдемесинин жекече чыгарылышын төмөндөгүдөй функция түрүндө жазууга болот:

$$f(z) = A\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot z^i \tag{39}$$

мында А каалагандай турактуу, C_i коэффициенттери (38) же (37) рекуренттик формуласынын негизинде аныкталат.

(39) функциясын (3) формуласына коюп, (1) теңдемесинин жекече чыгарылышын төмөндөгү функция түрүндө алабыз:

$$H(x, y, t) = (x + y)^m A\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot \left(\frac{t}{(x+y)^n}\right)^i \tag{40}$$

мында А - (2) чектик шарттарынын негизинде аныкталуучу каалагандай турактуу, C_i - (38) рекуренттик формуласынан аныкталат.

Адабияттар:

1. Полубаринова – Кочина Н.Я. Теория движения грунтовых вод. М. Наука 1977г.
2. Бийбосунов Б.И., Уметалиев М.У. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. Бишкек. Илим.1998 г.
3. Абуталиев Ф.Б. и др. Методы математического моделирования гидродинамических процессов. М. Недра. 1972 г.
4. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики М. Наука. 1972 г.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука. 1976 г.

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Бекболотов Д.Б.