Бийбосунов Б.И., Бексултанов Ж.Т.

ТОО БЕТТЕРИНДЕГИ СУЮКТУКТУН СТАЦИОНАРДЫК ФИЛЬТРАЦИЯСЫНЫН ЧЕТКИ МАСЕЛЕЛЕРИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Бийбосунов Б.И., Бексултанов Ж.Т.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ГОРНЫХ СКЛОНОВ

B.I. Biibosunov Zh.T. Beksultanov

SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF STATIONARY LIQUID FILTRATION MOUNTAIN SLOPES

УДК:532.546

Берилген статьяда бир тектүү эмес – изотроптуу чөйрөдөгү суюктуктун стационардык фильтрациясын чыгаруу каралган. Стационардык фильтрациянын, баштапкы – четки маселелер түрүндө берилген, математикалык модели автомодельдик формада чыгарылып, жана гипергеометриялык функция түрүндөгү аналитикалык чыгарылышы табылган.

This article discusses the solution of the stationary liquid filtration in inhomogeneous isotropic medium. Mathematical model of stationary filtration, presented in the form of the initial-boundary value problem is solved in the form of self, and are analytical solution in the form of a hypergeometric function.

Гидродинамикалык маселелерди чыгаруунун аналитикалык же жарым аналитикалык жана жакындаштырылган – аналитикалык методдорунун маанилери жалпыга белгилүү. Фильтрациянын жана инфильтрациянын маселелери үчүн аналитикалык чыгарылыштарын табуу көптөгөн математикалык кыйынчылыктар менен коштолот жана ага карабастан көргөзүлгөн типтеги маселелер үчүн так чыгарылыштарды алууга жаңы методдорду иштеп чыгуу маселелери коюлат. Өзүнүн илимий-теоретикалык маанисинен сырткары, алынган аналитикалык же автомоделдик чыгарылыштар сандык методдор жана эсептөө техникасын колдонуу менен тестик эсептөөлөр үчүн колдонмо баалулуктарга ээ.

Бул иште бир тектүү эмес - изотроптуу чөйрөдөгү суюктуктун фильтрациясынын четки маселеси формулировкаланып жана чыгарылган. Мындай четтик маселе, биз билгендей көчкү беттериндеги фильтрациялык агымдар үчүн гана эмес, башка дагы бир тектүү жана бир тектүү эмес чөйрөлөрдөгү суюктуктун механикасынын ушул сыяктуу маселелери үчүн колдонууга болот. Кичине параметрлер методунун негизинде бул иштеги фильтрациондук маселе үчүн автомоделдик чыгарылышын табуунун бир нече жолдору көргөзүлгөн.

Фильтрациянын коэффициенттерин төмөндөгүдөй функция түрүндө карайлы:

$$K_1(x;y) = K_2(x;y) = \left(\frac{ay + b_1}{ax + b}\right)^S$$

Төмөндөгүдөй чектик шарттарда:

$$\begin{aligned} &H(x,y)\big|_{x=N_1} = H_{01}(y) && H(x,y)\big|_{x=N_2} = H_{11}(y) \\ &H(x,y)\big|_{x=N_1'} = H_{01}(x) && H(x,y)\big|_{x=N_2'} = H_{11}(x) \\ &N_1 \le x \le N_2 && N_1' \le y \le N_2' \end{aligned} \qquad (1)$$

фильтрация теңдемеси

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{ay + b_1}{ax + b}\right)^S \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{ay + b_1}{ax + b}\right)^S \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right] = 0 \qquad (2)$$

түрүнө келет.

(1) - (2) четки маселелердин чыгарылышын төмөндөгүдөй автомодельдик формада издейбиз:

$$H(x,y) = (ax+b)^m \cdot f(z), \text{ где } z = \left(\frac{ax+b}{ay+b_1}\right)^n \qquad (3)$$

Мында m – автомодельдүүлүктүн көрсөткүчү.

Андан ары,

$$\frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{ay+b_1}{ax+b}\right)^S = -as\frac{(ay+b_1)^s}{(ax+b)^{s+1}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{ay+b_1}{ax+b}\right)^S = as\frac{(ay+b_1)^{s-1}}{(ax+b)^s}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = ma(ax+b)^{m-1}\cdot f(z) + na\frac{(ax+b)^{m+n-1}}{(ay+b_1)^n}\cdot f'(z)$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = -na\frac{(ax+b)^{m+n}}{(ay+b_1)^{n+1}}\cdot f'(z) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}\cdot f(z) + na^2(2m+n-1)\frac{(ax+b)^{m+n-2}}{(ay+b_1)^n}\cdot f'(z) +$$
$$+n^2a^2\frac{(ax+b)^{m+2n-2}}{(ay+b_1)^{2n}}\cdot f''(z) \tag{5}$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = n(n+1)a^2\frac{(ax+b)^{m+n}}{(ay+b_1)^{n+2}}\cdot f'(z) + n^2a^2\frac{(ax+b)^{m+2n}}{(ay+b_1)^{2n+2}}\cdot f''(z)$$

алабыз. (5) жекече туундуларын (2) тещдемесине коюп, бир нече өзгөртүп түзүүлөрдү жургүзгөндөн кийин,

$$z^2\left(1+z^{\frac{2}{n}}\right)\cdot f''(z)+\left[\frac{n-s+1}{n}z^{\frac{2}{n}}+\frac{2m+n-s-1}{n}\right]\cdot z\cdot f'(z)+\frac{m(m-s-1)}{n^2}\cdot f(z)=0 \tag{6}$$

тещдемесин алабыз. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$\mu=\frac{2}{n};\ q=\frac{2m+n-s-1}{n};\ d=\frac{n-s+1}{n};\ l=\frac{m(m-s-1)}{n^2}. \tag{7}$$

Анда (6) тещдемесинен:

$$z^2(1+z^{\mu})\cdot f''(z)+(q+dz^{\mu})z\cdot f'(z)+l\cdot f(z)=0 \tag{8}$$

алабыз. Бул тещдемени $\mu=-1,\ n=-2$ учурлары үчүн карайбыз. Анда,

$$q=\frac{3+s-2m}{2};\ d=\frac{s+1}{2};\ l=\frac{m(m-s-1)}{4}$$

(8) тещдемесинен,

$$z(z+1)\cdot f''(z)+\left(\frac{3+s-2m}{2}\cdot z+\frac{s+1}{2}\right)\cdot f'(z)+\frac{m(m-s-1)}{4}\cdot f(z)=0 \tag{9}$$

алабыз.

$$f(z)=\eta(\xi),\quad \xi=-z \tag{10}$$

болсун деп болжолдоп, (10) тещдемесинен төмөндөгүдөй гипергеометриялык теңдемесин алабыз:

$$\xi(\xi-1)\cdot\eta''(\xi)+\left(\frac{3+s-2m}{2}\cdot\xi-\frac{s+1}{2}\right)\cdot\eta'(\xi)+\frac{m(m-s-1)}{4}\cdot\eta(\xi)=0. \tag{11}$$

Акыркы тещдемени жөнөкөйлөтүү максатында $s=1$ болсун деп болжолдоп,

$$\xi(\xi-1)\cdot\eta''(\xi)+[(2-m)\cdot\xi-1]\cdot\eta'(\xi)+\frac{m(m-2)}{4}\cdot\eta(\xi)=0 \tag{12}$$

алууга болот. Мындан,

$$\begin{cases}\alpha+\beta+1=2-m\\ \alpha\cdot\beta=\dfrac{m(m-2)}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=(1-m)-\beta\\ [(1-m)-\beta]\cdot\beta=\dfrac{m(m-2)}{4}\end{cases}.$$

$$\beta^2-(1-\beta)\cdot\beta+\frac{m(m-2)}{4}=0$$

тещдемесин алабыз. Тийешелүү түрдө төмөндөгүдөй чыгарылыштарды алууга болот.

$$\beta_1=-\frac{2-m}{2}\qquad \beta_2=-\frac{m}{2}$$
$$\alpha_1=-\frac{m}{2}\qquad \alpha_2=\frac{2-m}{2} \tag{13}$$

Анда (12) теңдемесинин чыгарылышы

$$\eta(\xi)=C_1^{/}\cdot F_1\left(-\frac{m}{2},\frac{2-m}{2},1,\ \xi\right)+C_2^{/}\cdot F_2\left(\frac{2-m}{2},-\frac{m}{2},1,\ \xi\right) \tag{14}$$

түрүндө жазылат, мында F_1 жана F_2 гипергеометриялык функциялар, $C_1^/$ жана $C_2^/$ - каалагандай туралтуулар.

(14) функциясын (11) формуласына коюп, (10) тещдемесинин чыгарылышын алабыз.

$$f(z) = A_1 \cdot F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{2-m}{2}, 1, -z\right) + A_2 \cdot F_2\left(\frac{2-m}{2}, -\frac{m}{2}, 1, -z\right) \tag{15}$$

мында F_1 жана F_2 гипергеометриялык функциялар, A_1, A_2 - каалагандай туралтуулар.

(15) функциясын (3) формуласына коюп,

$$H(x;y) = (ax+b)^m\left[A \cdot F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{2-m}{2}, 1, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b}\right)^2\right) + \right.$$
$$\left. + B \cdot F_2\left(\frac{2-m}{2}, -\frac{m}{2}, 1, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b}\right)^2\right)\right] \tag{16}$$

алабыз, мында F_1 жана F_2 гипергеометриялык функциялар, A, B – (1) чектик шарттардын негизинде аныкталуучу каалагандай туралтуулар. (16) функциясы $n=-2$ жана $s=1$ учурдагы (1) тещдемесинин чыгарылышы болуп эсептелет.

Эми (11) тещдемесин $s=0$ болгон учурун карайлы. Анда,

$$\xi(\xi-1)\cdot\eta''(\xi) + \left[\frac{3-2m}{2}\cdot\xi - \frac{1}{2}\right]\cdot\eta'(\xi) + \frac{m(m-1)}{4}\cdot\eta(\xi) = 0 \tag{17}$$

тещдемесин алабыз, мында,

$$\begin{cases} \alpha+\beta+1 = \dfrac{3-2m}{2} \\ \alpha\cdot\beta = \dfrac{m(m-1)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-2m}{2} - \beta \\ \left(\dfrac{1-2m}{2} - \beta\right)\cdot\beta = \dfrac{m(m-1)}{4} \end{cases}.$$

Бул жерден,

$$\beta^2 - \left(\frac{1-2m}{2}\right)\cdot\beta + \frac{m(m-1)}{4} = 0$$

тещдемесин алабыз жана тиешелүү түрдө,

$$\beta_1 = \frac{1-m}{2} \qquad \beta_2 = -\frac{m}{2}$$
$$\alpha_1 = -\frac{m}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1-m}{2} \tag{18}$$

табылат. Анда (17) тещдемесинин чыгарылышы, $\alpha_1 = -\frac{m}{2}$; $\beta_1 = \frac{1-m}{2}$ учуру үчүн, төмөндөгүдөй,

$$\eta(\xi) = C_1^/ \cdot F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{1}{2}, \xi\right) + C_2^/ \cdot \xi^2 \cdot F_2\left(\frac{1-m}{2}, \frac{2-m}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) \tag{19}$$

ал эми, $\alpha_2 = \frac{1-m}{2}$; $\beta_2 = -\frac{m}{2}$ учуру үчүн, төмөндөгүдөй,

$$\eta(\xi) = C_1^/ \cdot F_1\left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{1}{2}, \xi\right) + C_2^/ \cdot \xi^2 \cdot F_2\left(\frac{2-m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) \tag{20}$$

функция түрүндө жазылат. Мында F_1 жана C_2 гипергеометриялык функциялар, $C_1^/$ жана $C_2^/$ - каалагандай туралтуулар.

(19) жана (20) функцияларын (10) формуласына коюп, тиешелүү түрдө,

$$f(z) = C_1 \cdot F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{1}{2}, -z\right) + C_2\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\cdot F_2\left(\frac{1-m}{2}, \frac{2-m}{2}, \frac{3}{2}, -z\right) \tag{21}$$

$$f(z) = C_1 \cdot F_1\left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{1}{2}, -z\right) + C_2\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\cdot F_2\left(\frac{2-m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3}{2}, -z\right) \tag{22}$$

алабыз. Мында F_1 жана F_2 гипергеометриялык функциялар, C_1 жана C_2 - каалагандай туралтуулар. Андан ары (21) жана (22) функцияларын (3) формуласына коюп, тиешелүү түрдө,

$$H(x;y) = (ax+b)^m \left[A_1 \cdot F_1 \left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{1}{2}, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right)^2 \right) + \right. \qquad (23)$$

$$\left. + B_1 \cdot \left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right) \cdot F_2 \left(\frac{1-m}{2}, \frac{2-m}{2}, \frac{3}{2}, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right)^2 \right) \right]$$

$$H(x;y) = (ax+b)^m \left[A_2 \cdot F_1 \left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{1}{2}, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right)^2 \right) + \right. \qquad (24)$$

$$\left. + B_2 \cdot \left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right) \cdot F_2 \left(\frac{2-m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3}{2}, -\left(\frac{ay+b_1}{ax+b} \right)^2 \right) \right]$$

алабыз. Мында F_1 жана F_2 гипергеометриялык функциялар, A_1, B_1, A_2, B_2 - (1) чектик шарттарынын негизинде аныкталуучу каалагандай турактуулар. (23) жана (24) функциялары (2) тещдемесинин $n = -2$ жана $s = 0$ учурундагы чыгарылышы болуп эсептелет.

Адабияттар:

1. Полубаринова – Кочина Н.Я. Теория движения грунтовых вод. М. Наука 1977г.
2. Бийбосунов Б.И., Уметалиев М.У. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. Бишкек. Илим.1998г.
3. Абуталиев Ф.Б. и др. Методы математического моделирования гидродинамических процессов. М. Недра. 1972г.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Бекболотов Т.Б.